FACULDADE ASSIS GURGACZ – FAG
Avenida das Torres, 500 – Fone: (45) 3321-3900 Fax: (045) 3321-3913
CEP: 85802-640 – Cascavel – Paraná
Email: fag@fag.edu.br

Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e Matriz Inversa

Geometria Analítica e Álgebra Linear - Engenharia

Profª. Alessandra S. F. Misiak

Cascavel – 2010

Matrizes

Introdução

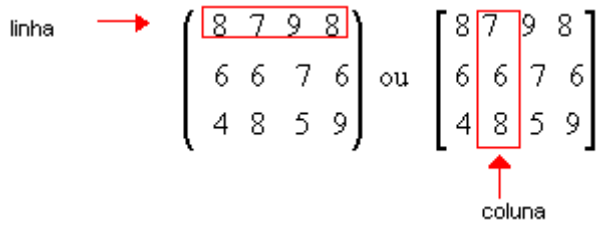
O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Vejamos um exemplo.

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

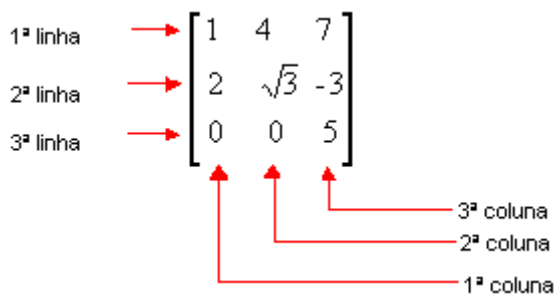
	Química	Inglês	Literatura	Espanhol
A	8	7	9	8
B	6	6	7	6
C	4	8	5	9

Se quisermos saber a nota do aluno **B** em Literatura, basta procurar o número que fica na segunda linha e na terceira coluna da tabela.

Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:



Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, *da esquerda para direita:*



Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes m x n. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz 3 x 3.

Veja mais alguns exemplos:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3

$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

Notação geral

Costuma-se representar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas*, acompanhadas por *dois índices* que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a_{23}}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{cases} a_{11} = 2, a_{12} = -1 \text{ e } a_{13} = \\ a_{21} = 4, a_{22} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{23} = \sqrt{2} \\ a_{31} = 0, a_{32} = 1 \text{ e } a_{33} = -2 \end{cases}$$

Ou na matriz B = [-1 0 2 5], temos: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

Denominações especiais

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

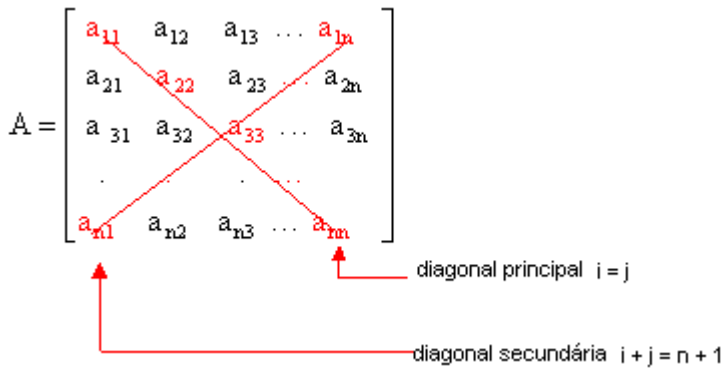
Matriz linha: matriz do tipo 1 x n, ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz A =[4 7 -3 1], do tipo 1 x 4.

Matriz coluna: matriz do tipo m x 1, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, do tipo 3 x 1

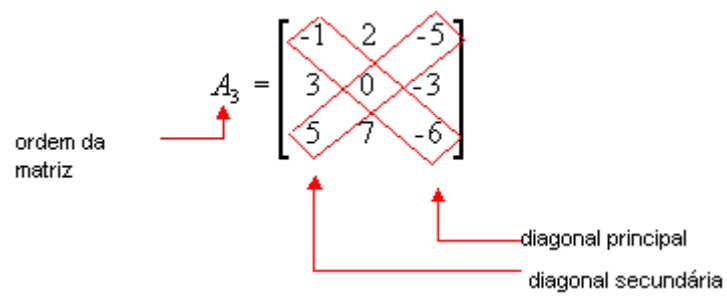
Matriz quadrada: matriz do tipo n x n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem **n**. Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a diagonal principal e a diagonal secundária. A principal é formada pelos elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tais que i = j. Na secundária, temos i + j = n + 1.

Veja:



Observe a matriz a seguir:



$a_{11} = -1$ é elemento da diagonal principal, pis i = j = 1

$a_{31} = 5$ é elemento da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 (3 + 1 = 3 + 1)

Matriz nula: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$.

Por exemplo, $0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Matriz diagonal: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

$a)\ A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b)\ B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Matriz identidade: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por $\mathbf{I_n}$, sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:

$a)\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b)\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Assim, para uma matriz identidade $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$, $a_{ij} = \begin{cases} 1, sei = j \\ 0, sei \neq j \end{cases}$.

Matriz transposta: matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, então\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo m x n, $\mathbf{A^t}$ é do tipo n x m.

Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A^t}$ e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A^t}$.

Matriz simétrica: matriz quadrada de ordem n tal que $\mathbf{A = A^t}$ **.** Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$, ou seja, temos sempre $a_{ij} = a_{ij.}$

Matriz oposta: matriz **-A** obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo,

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, então\ -A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ para\ \text{todo}\ 1 \le i \le m\ \text{e todo}\ 1 \le j \le n$$

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\ \text{e}\ A = B, \text{então}\ c = 0\ \text{e}\ b = 3$$

.

OPERAÇÕES ENVOLVENDO MATRIZES

Adição

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$, chamamos de soma dessas matrizes a matriz $C = [C_{ij}]_{m\,x\,n}$, tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \le i \le m\ \text{e todo}\ 1 \le j \le n$:

A + B = C

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo (m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) comutativa: A + B = B + A

b) associativa: (A + B) + C = A + (B + C)

c) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n

d) elemento oposto: A + (- A) = (-A) + A = 0

Subtração

Dadas as matrizes $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ e $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{m \times n}$, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$A - B = A + (- B)$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo m x n, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

$$B = x.A$$

Observe o seguinte exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: x . (yA) = (xy) . A

b) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: x . (A + B) = xA + xB

c) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: (x + y) . A = xA = yA

d) elemento neutro : xA = A, para x=1, ou seja, A=A

Multiplicação de matrizes

O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos sus respectivos elementos.

Assim, o produto das matrizes A = (a_{ij}) $_{m\,x\,p}$ e B = (b_{ij}) $_{p\,x\,n}$ é a matriz C = (c_{ij}) $_{m\,x\,n}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Vamos multiplicar a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada $\mathbf{C_{ij}}$:

1ª linha e 1ª coluna

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1 & 2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\boxed{-1}\\ 4\end{bmatrix}\ \begin{matrix}\ \\ 3\\ 2\end{matrix}=\begin{bmatrix}\overset{c_{11}}{\boxed{1.(-1)+2.4}}\\ \ \end{bmatrix}$$

1ª linha e 2ª coluna

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1 & 2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & \boxed{3}\\ 4 & \boxed{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.(-1)+2.4 & \overset{c_{12}}{\boxed{1.3+2.2}}\\ \ & \ \end{bmatrix}$$

2ª linha e 1ª coluna

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ \boxed{3 & 4}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\boxed{-1} & 3\\ \boxed{4} & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.(-1)+2.4 & 1.3+2.2\\ \boxed{3.(-1)+4.4} & \ \\ \overset{c_{21}}{\ } & \ \end{bmatrix}$$

2ª linha e 2ª coluna

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ \boxed{3 & 4}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & \boxed{3}\\ 4 & \boxed{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.(-1)+2.4 & 1.3+2.2\\ 3.(-1)+4.4 & \boxed{3.3+4.2}\\ \ & \overset{c_{22}}{\ }\end{bmatrix}$$

Assim, $A.B=\begin{bmatrix}7 & 7\\ 13 & 17\end{bmatrix}$.

Observe que:

$$A.B=\begin{bmatrix}\boxed{-1 & 3}\\ \boxed{4 & 2}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\boxed{1} & \boxed{2}\\ \boxed{3} & \boxed{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{(-1).1+3.3} & \boxed{(-1).2+3.4}\\ \boxed{4.1+2.3} & \boxed{4.2+2.4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 10 & 16\end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B$.A, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.0+3(-1) & 1.3+2.1+3.4 \\ -2.2+0.0+4(-1) & -2.3+0.1+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto A . B só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de

$$A_{m \times p} . B_{p \times n} = (A.B)_{m \times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A (m)** e o número de colunas de **B(n)**:

Se $A_{3 \times 2}$ e $B_{2 \times 5}$, então $(A . B)_{3 \times 5}$

Se $A_{4 \times 1}$ e $B_{2 \times 3}$, então não existe o produto

Se $A_{4 \times 2}$ e $B_{2 \times 1}$, então $(A . B)_{4 \times 1}$

Propriedades

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: (A . B) . C = A . (B . C)

b) distributiva em relação à adição: A . (B + C) = A . B + A . C ou (A + B) . C = A . C + B . C

c) elemento neutro: $A . I_n = I_n . A = A$, sendo $\mathbf{I_n}$ a matriz identidade de ordem **n**

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes. Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m \times n}$ uma matriz nula, $A .B = 0_{m \times n}$ não implica, necessariamente, que $A = 0_{m \times n}$ ou $B = 0_{m \times n}$.

Matriz inversa

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem **n**, se existir uma matriz **A'**, de mesma ordem, tal que $A . A' = A' . A = I_n$, então **A'** é matriz inversa de **A** . representamos a matriz inversa por $\mathbf{A^{-1}}$**.**

Determinantes

Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo nxn).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de *determinante*.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:

resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;

cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices;

Determinante de 1ª ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem $M=[a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11}:

$$\det M = |a_{11}| = a_{11}$$

Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

Por exemplo:

M= [5] $\Rightarrow$ det M = 5 ou I 5 I = 5 M = [-3] $\Rightarrow$ det M = -3 ou I -3 I = -3

Determinante de 2ª ordem

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a **M**, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

$Sendo\ M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, temos:$

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 4.3 = 10 - 12 \Rightarrow \det M = -2$$

Menor complementar

Chamamos de *menor complementar* relativo a um elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de uma matriz **M**, quadrada e de ordem n>1, o determinante $\mathbf{MC_{ij}}$, de ordem n - 1, associado à matriz obtida de **M** quando suprimimos a linha e a coluna que passam por $\mathbf{a_{ij}}$ **.**

Vejamos como determiná-lo pelos exemplos a seguir:

a) Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, para determinar o menor complementar relativo ao elemento $\mathbf{a_{11}(MC_{11})}$, retiramos a linha 1 e a coluna 1:

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

Da mesma forma, o menor complementar relativo ao elemento a_{12} é:

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow MC_{12} = |a_{21}| = a_{21}$$

b) Sendo $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, de ordem 3, temos:

$$MC_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \qquad MC_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}$$

Cofator

Chamamos de *cofator* ou *complemento algébrico* relativo a um elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de uma matriz quadrada de ordem **n** o número $\mathbf{A_{ij}}$ tal que $A_{ij} = (-1)^{i+j} . MC_{ij}$.

Veja:

a) Dada $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, os cofatores relativos aos elementos $\mathbf{a_{11}}$ e $\mathbf{a_{12}}$ da matriz **M** são:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\overbrace{a_{22}}^{MC_{11}} = (-1)^2 a_{22} = +a_{22} \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}.\overbrace{a_{21}}^{MC_{12}} = (-1)^3 a_{21} = -a_{21}$$

b) Sendo $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, vamos calcular os cofatores $\mathbf{A_{22}}$, $\mathbf{A_{23}}$ e $\mathbf{A_{31}}$:

$$A_{22} = (-1)^{2+2}.\overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}^{MC_{22}} = (+1)(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}.\overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}^{MC_{23}} = (-1)(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\overbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}^{MC_{31}} = (+1)(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]_{mxn}$ $(m \geq 2)$ pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz **M** pelos respectivos cofatores.

Assim, fixando $j \in \mathbb{N}, \text{tal que } 1 \leq j \leq m$, temos:

$$\det M = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$$

em que $\sum_{i=1}^{m}$ é o somatório de todos os termos de índice **i**, variando de 1 até **m**, $m \in \mathbb{N}$.

Regra de Sarrus

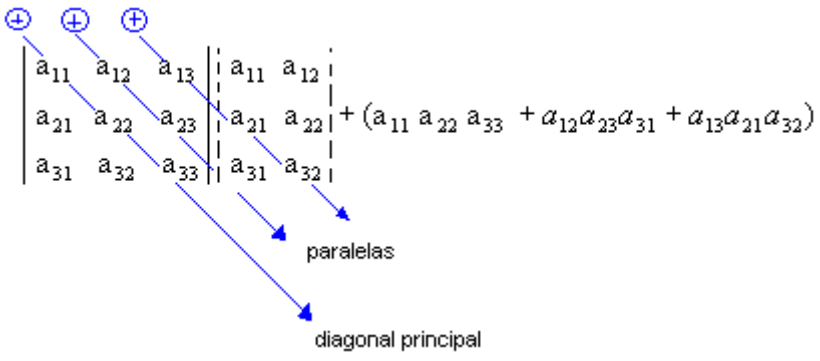
O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado *regra de Sarrus.*

Acompanhe como aplicamos essa regra para $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

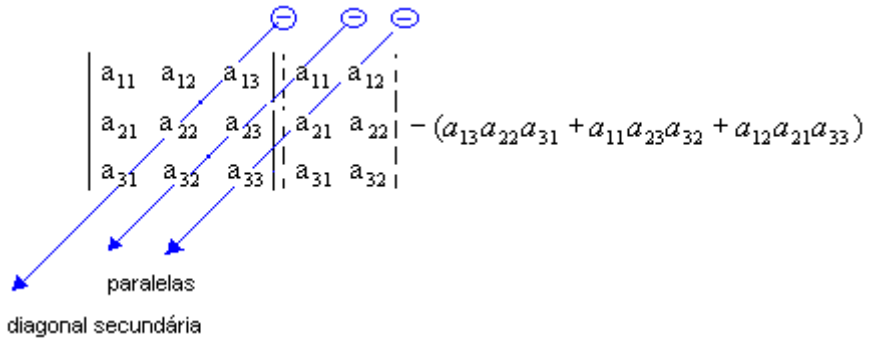
1º passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal principal* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):

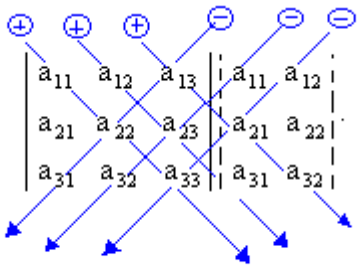


3º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal secundária* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo):



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Assim:



$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

Observação: Se desenvolvermos esse determinante de 3ª ordem aplicando o Teorema de Laplace, encontraremos o mesmo número real.

Determinante de ordem n > 3

Vimos que a regra de Sarrus é válida para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3. Quando a matriz é de ordem superior a 3, devemos empregar o Teorema de Laplace para chegar a determinantes de ordem 3 e depois aplicar a regra de Sarrus.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Os demais associados a matrizes quadradas de ordem **n** apresentam as seguintes propriedades:

P_1) Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Exemplo:

$$a)\begin{vmatrix} 4 & 9 & -8 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad b)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

P_2) Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$= \begin{matrix} L_1 \\ \\ \\ L_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} \boxed{2 & 1 & 3 & 5} \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ \boxed{2 & 1 & 3 & 5} \\ 9 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

P_3) Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 4 & \boxed{2} \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{4} \\ \boxed{3} & 2 & \boxed{6} \end{vmatrix} = 0$$

$C_3 = 2C_1$

P_4) Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

Exemplos:

$$a) \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{6} \\ \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{5} \end{vmatrix} = 0$$

$C_1 + C_2 = C_3$

$$b) \begin{vmatrix} \boxed{3 & 4 & 1} \\ \boxed{1 & 2 & 3} \\ \boxed{7 & 10 & 5} \end{vmatrix} = 0$$

$2L_1 + L_2 = L_3$

P_5) **Teorema de Jacobi**: o determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Substituindo a 1ª coluna pela soma dessa mesma coluna com o dobro da 2ª, temos:

$$\begin{vmatrix} 1+2.2 & 2 & 2 \\ 2+1.2 & 1 & 2 \\ 2+4.2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_6) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad \det A^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_7) Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

Exemplos:

$$a)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} = -4 \quad \text{multiplicando} \quad \overset{2C_1}{\rightarrow} \quad C_1 \text{ por } 2: \begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -1\\ 6 & 2 & 1\end{vmatrix} = 2(-4) = -8$$

$$b)\begin{vmatrix}5 & -10 & 0\\ 3 & 7 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix} = -145 \quad \text{Multiplicando} \quad \overset{\frac{1}{5}L_1}{\rightarrow} \quad L_1 \text{por } \frac{1}{5}: \begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 7 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{5}(-145) = -29$$

P_8) Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} = -4 \text{ Trocando as posições de } L_1 \text{ e } L_2: \begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} == +4$$

P_9) Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplos:

$$a)\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ d & b & 0\\ e & f & c\end{vmatrix} = a.b.c \qquad b)\begin{vmatrix}x & g & h\\ 0 & y & i\\ 0 & 0 & z\end{vmatrix} = x.y.z$$

P_{10}) Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal secundária são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal multiplicado por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exemplos:

$a)\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & x \end{vmatrix} = -a.b$

$b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & x \\ c & y & z \end{vmatrix} = -a.b.c$

P_{11}) Para **A** e **B** matrizes quadradas de mesma ordem **n**, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. Como:

$A \cdot A^{-1} = I$, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Exemplo:

$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e\ A.B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}, então:$

$\underbrace{\det(AB)}_{10} = \underbrace{\det A}_{5} . \underbrace{\det B}_{2}$

P_{12}) $Se\ K \in R$, então $\det(K \cdot A) = K^n . \det A$.

Exemplo:

$Sendo\ K = 3, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $K.A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}, temos:$

$\underbrace{\det(K.A)}_{54} = \underbrace{K^n}_{3^3} . \underbrace{\det A}_{6}$

Sistemas Lineares

Equação linear

Equação linear é toda equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

em que $\mathbf{a_1, a_2, a_3, ... , a_n}$ são números reais, que recebem o nome de *coeficientes* das *incógnitas*

$\mathbf{x_1, x_2, x_3, ... , x_n}$, e **b** é um número real chamado *termo independente* (quando b=0, a equação recebe o nome de *linear homogênea*).

Veja alguns exemplos de equações lineares:

3x - 2y + 4z = 7

-2x + 4z = 3t - y + 4

$x + y - 3z - \sqrt{7}\,t = 0$ (homogênea)

As equações a seguir não são lineares:

xy - 3z + t = 8 x^2- 4y = 3t - 4 $\sqrt{x} - 2y + z = 7$

Sistemas Lineares

Sistema linear

Um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema linear de **m** equações e **n** incógnitas.

A solução de um sistema linear é a n-upla de números reais ordenados (r_1, r_2, r_3,..., r_n) que é, simultaneamente, solução de todas as equações do sistema.

Matrizes associadas a um sistema linear

A um sistema linear podemos associar as seguintes matrizes:

matriz incompleta: a matriz **A** formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema.

Em relação ao sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + y + z = 7 \\ -2x + y + z = 4 \end{cases}$$

a matriz incompleta é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz completa: matriz **B** que se obtém acrescentando à matriz incompleta uma última coluna formada pelos termos independentes das equações do sitema.

Assim, para o mesmo sistema acima, a matriz completa é:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas homogêneos

Um sistema é homogêneo quando todos os termos independentes da equações são nulos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Veja um exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \\ \sqrt{2}x + 3y = 0 \end{cases}$$

A n-upla (0, 0, 0,...,0) é sempre solução de um sistema homogêneo com **n** incógnitas e recebe o nome de *solução trivial.* Quando existem, as demais soluções são chamadas não-triviais.

Classificação de um sistema quanto ao número de soluções

Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$, encontramos uma única solução: o par ordenado (3,5). Assim, dizemos que o sistema é possível (tem solução) e determinado (solução única).

No caso do sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$, verificamos que os pares ordenados (0,8), (1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),...são algumas de suas infinitas soluções. Por isso, dizemos que o sistema é possível (tem solução) e indeterminado (infinitas soluções).

Para $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x - y = 10 \end{cases}$, verificamos que nenhum par ordenado satisfaz simultaneamente as equações. Portanto, o sistema é impossível (não tem solução).

Resumindo, um sistema linear pode ser:

a) possível e determinado (solução única);
b) possível e indeterminado (infinitas soluções);
c) impossível (não tem solução).

Sistema normal

Um sistema é normal quando tem o mesmo número de equações (**m**) e de incógnitas (**n**) e o determinante da matriz incompleta associada ao sistema é diferente de zero.

Se m=n e det A $\neq$ 0, então o sistema é normal.

Regra de Cramer

Todo sistema normal tem uma única solução dada por:

$$x_i = \frac{D_{xi}}{D}$$

em que i $\in$ { 1,2,3,...,n}, D= det A é o determinante da matriz incompleta associada ao sistema, e D_{xi} é o determinante obtido pela substituição, na matriz incompleta, da coluna **i** pela coluna formada pelos termos independentes.

Discussão de um sistema linear

Se um sistema linear tem **n** equações e **n** incógnitas, ele pode ser:

a) possível e determinado, se D=det A $\neq$ 0; caso em que a solução é *única.*

Exemplo:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

m=n=3

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Então, o sistema é possível e determinado, tendo solução única.

b) possível e indeterminado, se D= $D_{x1} = D_{x2} = D_{x3} = ... = D_{xn} = 0$, para n=2. Se n $\geq$ 3, essa condição só será válida se não houver equações com coeficientes das incógnitas respectivamente proporcionais e termos independentes não-proporcionais.

Um sistema possível e indeterminado apresenta infinitas soluções.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

D=0, D_x =0, D_y=0 e D_z=0

Assim, o sistema é possível e indeterminado, tendo infinitas soluções.

c) impossível, se D=0 e $\exists D_{xi} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$; caso em que o sistema não tem solução.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$$

Como D=0 e $D_x \neq 0$, o sistema é impossível e não apresenta solução.

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Por exemplo, dados os sistemas:

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

verificamos que o par ordenado (x, y) = (1, 2) satisfaz ambos e é único. Logo, S_1 e S_2 são equivalentes: $S_1 \sim S_2$.

Propriedades

a) Trocando de posição as equações de um sistema, obtemos outro sistema equivalente.

Por exemplo:

$$S_1 = \begin{cases} x + y + 2z = 1 \quad (I) \\ x - y = 3 \quad (II) \\ y + z = 2 \quad (III) \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} x - y = 3 \quad (II) \\ y + z = 2 \quad (III) \\ x + y + 2z = 1 \quad (I) \end{cases}$$

$S_1 \sim S_2$

b) Multiplicando uma ou mais equações de um sistema por um número **K** ($K \in IR^*$), obtemos um sistema equivalente ao anterior.
Por exemplo:

$$S_1 = \begin{cases} x + 2y = 3 \ (I) \\ x - y = 0 \ (II) \end{cases} \begin{array}{l} \text{multiplica ndo a} \\ \text{equação (II) por 3} \end{array} \quad S_2 = \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

$S_1 \sim S_2$

c) Adicionando a uma das equações de um sistema o produto de outra equação desse mesmo sistema por um número **k** ($K \in IR^*$), obtemos um sistema equivalente ao anterior.

Por exemplo:

Dado $S_1 = \begin{cases} x + 2y = 4 \ (I) \\ x - y = 1 \ (II) \end{cases}$, substituindo a equação (II) pela soma do produto de (I) por -1 com (II), obtemos:

$$S'_1 = \begin{cases} -x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ -3y = -3 \end{array} \qquad S_2 = \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -3y = -3 \end{cases}$$

$S_1 \sim S_2$, pois (x,y)=(2,1) é solução de ambos os sistemas.

SISTEMAS ESCALONADOS

Utilizamos a regra de Cramer para discutir e resolver sistemas lineares em que o número de equações (**m**) é igual ao número de incógnitas (**n**). Quando **m** e **n** são maiores que três, torna-se muito trabalhoso utilizar essa regra. Por isso, usamos a técnica do *escalonamento,* que facilita a discussão e resolução de quaisquer sistemas lineares.

Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está escalonado se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta de equação para equação.

Para escalonar um sistema adotamos o seguinte procedimento:

a) Fixamos como 1º equação uma das que possuem o coeficiente da 1º incógnita diferente de zero.

b) Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita das demais equações.

c) Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Vamos então aplicar a técnica do escalonamento, considerando dois tipos de sistema:

I. O número de equações é igual ao número de incógnitas (m=n)

Exemplo 1: $\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

1ºpasso: Anulamos todos os coeficientes da 1º incógnita a partir da 2º equação, aplicando as propriedades dos sistemas equivalentes:

Trocamos de posição a 1º equação com a 2º equação, de modo que o 1º coeficiente de x seja igual a 1:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Trocamos a 2º equação pela soma da 1º equação, multiplicada por -2, com a 2º equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Leftarrow [(-2)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Trocamos a 3º equação pela soma da 1º equação, multiplicada por -3, com a 3º equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Leftarrow [(-3)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2º incógnita a partir da 3º equação:

Trocamos a 3º equação pela soma da 2º equação, multiplicada por -1, com a 3º equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases} \Leftarrow [(-1)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + y = 3 \ (I) \\ -7y - 3z = -2 \ (II) \\ -2z = -6 \ (III) \end{cases}$$

Agora o sistema está escalonado e podemos resolvê-lo.

$-2z=-6 \Rightarrow z=3$

Substituindo z=3 em (II):

$-7y - 3(3)= -2 \Rightarrow -7y - 9 = -2 \Rightarrow y=-1$

Substituindo z=3 e y=-1 em (I):

$x + 2(-1) + 3= 3 \Rightarrow x=2$

Então, x=2, y=-1 e z=3

Exemplo 2: $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1º incógnita a partir da 2º equação:

Trocamos a 2º equação pela soma do produto da 1º equação por -2 com a 2º equação:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \Leftarrow [(-2)] \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}$$

Trocamos a 3º equação pela soma do produto da 1º equação por -3 com a 3º equação:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \end{cases} \Leftarrow [(-3)] \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \\ 5y-z=-7 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita, a partir da 3º equação:

Trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 2ª equação por -1 com a 3º equação:

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \end{cases} \Leftarrow [(-1)] \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-5 \\ 0z=-2 \end{cases}$$

Dessa forma, o sistema está escalonando. Como não existe valor real de z tal que 0z=-2, o sistema é impossível.

II) O número de equações é menor que o número de incógnitas (m < n)

Exemplo 3: $\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ 2x+y-2z+t=-1 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases}$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1º incógnita a partir da 2º equação:

Trocamos a 2º equação pela soma do produto da 1º equação por -2 com a 2º equação:

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ 2x+y-2z+t=-1 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases} \Leftarrow [(-2)] \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases}$$

Trocamos a 3º equação pela soma do produto da 1º equação por -1 com a 3º equação:

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases} \Leftarrow[(-1)] \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ -3y+0z+3t=-9 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2º incógnita, a partir da 3º equação:

Trocamos a 3º equação pela soma do produto da 2º equação por -3 com a 3º equação

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ -3y+0z+3t=-9 \end{cases} \Leftarrow[(-3)] \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ 12z-6t=30 \end{cases}$$

O sistema está escalonado. Como m<n, o sistema é possível e indeterminado, admitindo infinitas soluções. A diferença entre o número de incógnitas (n) e o de equações (m) de um sistema nessas condições é chamada *grau de indeterminação* (GI):

GI= n - m

Para resolver um sistema indeterminado, procedemos do seguinte modo:

Consideramos o sistema em sua forma escalonada:

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ 12z-6t=30 \end{cases}$$

Calculamos o grau de indeterminação do sistema nessas condições:

GI = n-m = 4-3 = 1

Como o grau de indeterminação é **1**, atribuímos a uma das incógnitas um valor α, supostamente conhecido, e resolvemos o sistema em função desse valor. Sendo t=α, substituindo esse valor na 3º equação, obtemos:

$12z - 6\alpha = 30 \Rightarrow 12z = 30 + 6\alpha \Rightarrow Z = \frac{30+6\alpha}{12} = \frac{5+\alpha}{2}$

Conhecidos **z** e **t,** substituímos esses valores na 2º equação:

$$-y-4\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)+3\alpha=-13 \Rightarrow -y-10-2\alpha+3\alpha=-13 \Rightarrow$$

$$-y+\alpha=-13+10 \Rightarrow -y=-\alpha-3 \Rightarrow y=\alpha+3$$

Conhecidos **z,t** e **y**, substituímos esses valores na 1º equação:

$$x+\alpha+3+\frac{5+\alpha}{2}-\alpha=6 \Rightarrow 2x+2\alpha+6+5+\alpha-2\alpha=12 \Rightarrow 2x+$$

$$\alpha+11=12 \Rightarrow 2x=1-\alpha \Rightarrow x=\frac{1-\alpha}{2}$$

Assim, a solução do sistema é dada por S= $\left\{\left(\frac{1-\alpha}{2}, \alpha+3, \frac{5+\alpha}{2}, \alpha\right)\right\}$, com $\alpha \in$ IR.

Para cada valor que seja atribuído a α, encontraremos uma quádrupla que é solução para o sistema.

CURSO DE ENGENHARIA

DISCIPLINA: Geometria Analítica e Álgebra Linear

PROFESSORA: Alessandra Stadler Favaro Misiak

1ª LISTA DE EXERCÍCIO –Matrizes

1. Sejam $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$ e $D=\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}$, encontre:

a) A+B
b) A.C
c) B. C
d)C . D
e)D. A
f) D. B
g) - A
h) –D

2. Seja $A=\begin{pmatrix}2 & x^2\\ 2x-1 & 0\end{pmatrix}$. Se A^t = A, então x = _____.
3. Se A é uma matriz simétrica, então A - A^t = _____.
4. Se A é uma matriz triangular superior, então A^t é _____.
5. Se A é uma matriz diagonal, então A^t = _____.
6. Verdadeiro ou falso?

a) $(-A)^t = -(A^t)$
b) $(A+B)^t = B^t + A^t$
c) Se AB = 0, então A=0 ou B=0.
d) $(k_1A)(k_2B)=(k_1k_2)AB$
e) (-A) (-B) = - (AB)
f) Se A e B são matrizes simétricas, então AB = BA.
g) Se AB=0, então BA=0.
h) Se podemos efetuar o produto AA, então A é uma matriz quadrada.Se A^2 = AA, então $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}^2$ = _____.

7. Se A é uma matriz triangular superior, então A^2 é _____.
8. Ache x, y, z, w se $\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.
9. Se $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}$, ache B, de modo que B^2 = A.
10. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: Moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:

	Ferro	Madeira	Vidro	Tinta	Tijolo
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas do tipo moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?
b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 u.c.p. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?
c) Qual o custo total do material empregado?

Respostas:

1.a) $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}15\\ -4\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}6\\ 1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\\ 8 & -4\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}0 & 3 & 7\end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix}-7 & 0 & 1\end{bmatrix}$

g) $-A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

h) $-D=\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}$

2. x=1
3. zero
4. Triangular inferior
5.Diagonal

6. a) V
b)V
c)F
d)V
e)F
f)F
g)F
h) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$
7. Triangular superior
8. x=-4,y=3,z=3,w=-2
9.a=1, b=-1 c=-2, d=1 ou a=-1, b=1, c=2,d=-1
10. a) $\begin{bmatrix} 146 & 526 & 260 & 158 & 388 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{bmatrix}$

c) 11736,00

CURSO DE ENGENHARIA

DISCIPLINA: Geometria Analítica e Álgebra Linear

PROFESSORA: Alessandra Stadler Favaro Misiak

2ª LISTA DE EXERCÍCIO –Matrizes

1. Sejam

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}$$

a) A+B **d) CD** **g) 3A**
b)AC **e) DA** **h) -D**
c)BC **f) DB** **i) D(2A+3B)**

2. Seja $A=\begin{bmatrix}2 & x^2\\ 2x-1 & 0\end{bmatrix}$**. Se A = A^t encontre o valor de x.**

3. Verifique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas. Quando uma afirmativa for falsa, tente consertá-la para que se torne verdadeira.

a) (-A)^t = - (A^t). **b) (A+B)^t = B^t + A^t.** **c) (-A)(-B) = - (AB)**

4. Obter a matriz **A = $(a_{ij})_{2x2}$** definida por **a_{ij} = 3 i - j**.

5. Uma matriz quadrada A é dita simétrica se A = A^T e é dita anti-simétrica se A^T = -A, onde A^T é a matriz transposta de A. Sendo A uma matriz quadrada, classifique em verdadeira ou falsa as duas afirmações:

(01) A + A^T é uma matriz simétrica
(02) A - A^T é uma matriz anti-simétrica

6. Se uma matriz quadrada A é tal que A^t = -A, ela é chamada matriz anti-simétrica. Sabe-se que M é anti-simétrica e:

$$M=\begin{bmatrix}4+a & a_{12} & a_{13}\\ a & b+2 & a_{23}\\ b & c & 2c-8\end{bmatrix}$$

Os termos a_{12}, a_{13} e a_{23} de M, valem respectivamente:

a) -4, -2 e 4
b) 4, 2 e -4
c) 4, -2 e -4
d) 2, -4 e 2
e) 2, 2 e 4

05. Se $\begin{pmatrix}x & y\\ m & n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ então, necessariamente:

a) x = y = 0
b) x = y = m = n = 0
c) x = y e m = n
d) y = -2x e n = -2m
e) x = -2y e m = -2n

7. Sobre as sentenças:

I. O produto das matrizes $A_{3\,x\,2}$ **.** $B_{2\,x\,1}$ é uma matriz 3 x 1.
II. O produto das matrizes $A_{5\,x\,4}$ **.** $B_{5\,x\,2}$ é uma matriz 4 x 2.
III. O produto das matrizes $A_{2\,x\,3}$ **.** $B_{3\,x\,2}$ é uma matriz quadrada 2 x 2

É verdade que:

a) somente I é falsa;
b) somente II é falsa;
c) somente III é falsa;
d) somente I e III são falsas;
e) I, II e III são falsas.

8. Se A é uma matriz 3 x 4 e B uma matriz n x m, então:

a) existe A + B se, e somente se, n = 4 e m = 3;
b) existe AB se, e somente se, n = 4 e m = 3;
c) existem AB e BA se, e somente se, n = 4 e m = 3;
d) existem, iguais, A + B e B + A se, e somente se, A = B;
e) existem, iguais, AB e BA se, e somente se, A = B.

09. (MACK) Sejam as matrizes $\begin{cases} A = (a_{ij})_{4x3}, a_{ij} = ji \\ e \\ B = (b_{ij})_{3x4}, b_{ij} = ji \end{cases}$. Se C = A . B, então c22 vale:

a) 3
b) 14
c) 39
d) 84
e) 258

10. (PUC) Se A, B e C são matrizes quadradas e A^t, B^t e C^t são suas matrizes transpostas, e igualdade falsa entre essas matrizes é:

a) (A = B) **.** C = A . C + B **.** C
b) $(A + B)^t = A^t + B^t$
c) $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$
d) (A - B)C = AC - BC
e) $(A^t)^t = A$

Gabarito:

1.

a) $A+B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $AC=\begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $BC=\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $CD=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

e) $DA=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

f) $DB=\begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $3A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

h) $-D=\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$

i) $D(2A+3B)=\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} -21 & 10 & 13 \end{bmatrix}$

2.

Solução. Se $A = A^t$ (matriz transposta), então: $\begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix}$

Duas matrizes são iguais, se cada elemento de A_{ij} é igual a cada elemento de $A^t_{ij.}$ Logo, basta resolver a equação $x^2 = 2x - 1$. Utilizando a fatoração, temos: $x^2 - 2x + 1 = 0$ pode ser escrito como $(x-1)^2 = 0$. A solução é a raiz dupla x=1.

3.

a) $(-A)^t = -(A^t)$. Verdadeira. Basta observar que a matriz está somente multiplicada por (-1).
b) $(A+B)^t = B^t + A^t$. Verdadeira. Observe que vale $A^t + B^t$, pois a adição entre matrizes é comutativa.
c) (-A)(-B) = - (AB) Falso. Mesmo considerando as possibilidades de o produto existir, isto é, número de linhas de A ser igual ao número de colunas de B, o resultado do produto indicado é positivo: (AB).

4.

RESOLUÇÃO: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

5.RESOLUÇÃO: (01) verdadeira
(02) verdadeira

6
RESPOSTA: B

7.
RESPOSTA: E

8. RESPOSTA: B

9.RESPOSTA: C

10.RESPOSTA: D

CURSO DE ENGENHARIA

DISCIPLINA: Geometria Analítica e Álgebra Linear

PROFESSORA: Alessandra Stadler Favaro Misiak

2ª LISTA DE EXERCÍCIO –Determinantes

01) Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, calcular o determinante da matriz C onde $C=AB$.

02) Calcule cada um dos determinantes a seguir, utilizando a regra de Sarrus.

$a)\ \begin{vmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$

$b)\ \begin{vmatrix}0 & 5 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 6\end{vmatrix}$

$c)\ \begin{vmatrix}0 & 3 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}$

$d)\ \begin{vmatrix}0 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$e)\ \begin{vmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{vmatrix}$

03) Seja a matriz $A=(a_{ij})$, de ordem 3, tal que $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{se } i<j\\ k, & \text{se } i=j\\ -1, & \text{se } i>j\end{cases}$ e $k\in\Re$. Calcule k de modo que o determinante da matriz A seja nulo.

04) Dadas as matrizes:

$A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ e $X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ tais que $2A-X=B$, calcule o determinante de X.

05) Encontre a solução das equações:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & n-1\\ n & 0 & n\end{vmatrix}=12.$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{5}\\ \mathbf{x} & \mathbf{-2} & \mathbf{3}\end{vmatrix}=55$$

06) Calcule os determinantes:

$$\begin{vmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{8}\\ \mathbf{1} & \mathbf{5}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{6} & \mathbf{-2}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{5}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{8}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5}\end{vmatrix}$$

07) Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{9}\end{bmatrix}$, calcule:

a) det A

b) det 2A

c) det A^2

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ usando a definição de Laplace

b) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 3 & 10 & 8 & 1\\ 5 & 16 & 11 & 1\\ 1 & 3 & 5 & 2\end{vmatrix}$ pela regra de Chió

CURSO DE ENGENHARIA

DISCIPLINA: Álgebra Linear PROFESSORA: Alessandra Stadler Favaro Misiak

Lista de exercícios Sistemas Lineares

1 – O sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ Kx + 2y = 2 \end{cases}$ é determinado para que valores de K?

2 – Resolva:

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ 4z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ -y - 2z = 9 \end{cases}$

3 – Classifique o sistema $\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}$.

4 – O sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

a) tem uma única solução
b) não tem soluções reais
c) tem 3 soluções distintas
d) tem infinitas soluções reais.

5 – Qual dos ternos seguintes não é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \end{cases}$?

a) (-3, 2, 0)
b) (-7, 3, 1)
c) (-11, 4, 2)
d) (1, 1, -1)
e) (3, -1, 0)

6 – Qual dos sistemas seguintes é impossível?

a) $\{x + y + z = 8$

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 3z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

7 – (Fuvest-SP) Se $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases}$, então x é igual a:

a) 27
b) 3
c) 0
d) –2
e) 1

8 – (UEL-PR) Considere o seguinte sistema de equações nas incógnitas x e y. $\begin{cases} 3kx + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Esse sistema tem uma e uma só solução se o número real k for diferente de:

a) 1/5
b) 1/4
c) 2/5
d) 1/3
e) 3/2

9 – Classifique os seguintes sistemas lineares homogêneos $\begin{cases}5x-3y=0\\x+2y=0\end{cases}$ e $\begin{cases}x-y+2z=0\\2x+y+5z=0\\x+2y+3z=0\end{cases}$ como SPD ou SPI, respectivamente:

a) SPD, SPD
b) SPD, SPI
c) SPI, SPD
d) SPI, SPI
e) N.d.a.

10. Resolva os sistemas lineares usando regra de Cramer:

$a)\begin{cases}x_1+5x_2+2x_3=10\\2x_1+x_2-3x_3=-3\\3x_1+6x_2+5x_3=19\end{cases}$ $\{1,1,2\}$

$b)\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3=1\\x_1+x_2+2x_3=2\\4x_1+3x_2-2x_3=3\end{cases}$ $\{-3,5,0\}$

$c)\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\2x_1+3x_2+x_3=5\\x_1-x_2-2x_3=-5\end{cases}$ $\{0\ \ 1\ \ 2\}$

$d)\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=9\\2x_1-x_2+x_3=0\\4x_1-x_2+x_3=4\end{cases}$ $\{2,5,1\}$

e) $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=5\\4x_1+4x_2-3x_3=3\\2x_1-3x_2+x_3=-1\end{cases}$ $\{1,2,3\}$

11. Resolva os sistemas lineares:

a) $\begin{cases}\mathbf{x_1=1}\\\mathbf{2x_1+5x_2=2}\\\mathbf{3x_1+6x_2+4x_3=3}\end{cases}$ $\{1,0,0\}$

b) $\begin{cases}\mathbf{x_1=1}\\\mathbf{x_1+x_2=-1}\\\mathbf{x_1+x_2+x_3=3}\\\mathbf{x_1+x_2+x_3+x_4=3}\end{cases}$ $\{1,-2,4,0\}$

c) $\begin{cases}\mathbf{x_1-2x_2+3x_3+x_4=4}\\\mathbf{3x_3+x_4=3}\\\mathbf{x_3+x_4=2}\\\mathbf{x_4=1}\end{cases}$ $\varnothing$

12. Resolva os sistemas lineares:

$a)\begin{cases}x_1+5x_2+2x_3=10\\2x_1+x_2-3x_3=-3\\3x_1+6x_2+5x_3=19\end{cases}$

$\{1,1,2\}$

$b)\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3=1\\x_1+x_2+2x_3=2\\4x_1+3x_2-2x_3=3\end{cases}$

$\{-3,5,0\}$

$c)\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\2x_1+3x_2+x_3=5\\x_1-x_2-2x_3=-5\end{cases}$ $\{0\ \ 1\ \ 2\}$

$d)\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=9\\2x_1-x_2+x_3=0\\4x_1-x_2+x_3=4\end{cases}$ $\{2,5,1\}$

e) $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=5\\4x_1+4x_2-3x_3=3\\2x_1-3x_2+x_3=-1\end{cases}$ $\{1,2,3\}$

f) $\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3+x_4=10\\x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5\\x_1-x_2-x_3-x_4=-1\\x_1+x_2+x_3+x_4=3\end{cases}$

13. Num retângulo, o triplo do comprimento é igual ao quádruplo da largura. O retângulo tem 56 cm de perímetro. Calcule o comprimento e a largura. $\{12,16\}$

14. Uma fábrica tem que entregar em dezembro 86 veículos, entre bicicletas e triciclos. Ela vai produzir uma roda de reserva para cada bicicleta e duas para cada triciclo. Por isso vão ser produzidas 322 rodas. Quantas bicicletas serão entregues? Quantos triciclos? $\{54,32\}$

15. Um tipo de alimento é composto por açúcar, milho e extrato de malte. A quantidade de milho dessa composição é o quádruplo da quantidade de açúcar. Sabendo que o preço por quilograma do açúcar, do milho e do extrato de malte são, respectivamente, 80, 60, e 40 centavos e que o preço, por quilograma, daquele alimento composto por esses ingredientes é 55 centavos, calcule a quantidade de açúcar que compõe 1 Kg daquele alimento. $\{125\}$

16. Dois casais foram a um barzinho. O primeiro pagou R$5,40 por duas latas de refrigerantes e uma porção de batatas fritas. O segundo pagou R$9,60 por três latas de refrigerante e 2 porções de batatas fritas. Nesse local e nesse dia, determine a diferença entre o preço de uma porção de batatas fritas e o preço de uma lata de refrigerante. $\{1,80\}$

17. Um orfanato recebeu uma certa quantidade x de brinquedos para ser distribuída entre as crianças. Se cada criança receber três brinquedos, sobrarão 70 brinquedos para serem distribuídos; mas, para que cada criança possa receber cinco brinquedos, serão necessários mais 40 brinquedos. Determine o número de crianças do orfanato e a quantidade x de brinquedos que o orfanato recebeu. (represente o sistema) $\{55,235\}$

Matriz Inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Uma matriz B é chamada inversa de A se, e somente se,

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

em que:
B é a matriz inversa de A : $B = A^{-1}$
I_n é a matriz identidade de ordem n.

Assim, por exemplo, a matriz $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ é inversa de $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, pois:

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$$

$$BA=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$$

ou seja:
$AB = BA = I_n$

Obtenção

1º modo: a partir da definição.
Exemplo

Obter a matriz inversa da matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se existir.

Resolução:

Supondo que $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz inversa da matriz A, temos:

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim:

$$\begin{cases} 3a+c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3b+d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas:
$a = 1$, $b = -1$, $c = -2$ e $d = 3$
Portanto:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando:

$$B \cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto a matriz A é inversível e sua inversa é a matriz:

$$B = A^{-1} =\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2º modo: é possível provar que a matriz inversa de uma matriz A, caso exista, é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{cof } A)^t$$

$\det A \neq 0$
$\text{cof } A \rightarrow$ **matriz dos co-fatores** de A.
$(\text{cof } A)^t \rightarrow$ matriz transposta da matriz dos co-fatores. Também chamada de **matriz adjunta** de A.

Acompanhe a resolução de um exemplo.

Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, determine a sua inversa, se existir:

→ **calculamos det *A***

det *A* = 0 + 6 = 6 ≠0, logo existe a matriz inversa de *A*.

→ **determinamos a matriz dos co-fatores de *A*:**

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (0) = (-1)^2 - 0 = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = (-1)\ (3) = -3$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = (-1)(-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (1) = (1)(1) = 1$

$\text{cof } A=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

→ **determinamos a transposta de cof A, isto é, sua adjunta:**

$(cof\ A)^t=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

→ **finalmente, determinamos a matriz inversa da matriz A:**

$A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/3\\ -1/2 & 1/6\end{bmatrix}$

→ **fazemos a verificação:**

$AA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/3\\ -1/2 & 1/6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$

$A^{-1}A=\begin{bmatrix}0 & 1/3\\ -1/2 & 1/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$

Importante:

Para calcularmos o elemento *bij* da matriz inversa da matriz $A = (a_{ij})_{m \cdot n}$, aplicamos a fórmula abaixo, decorrente do teorema;

$$b_{ij}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{ji}$$

onde: A_{ji} é co-fator de a_{ji}

Exemplo:

Determinar o elemento b_{23} da matriz inversa de

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Resolução:

det *A* = 1 · 3 · 1 = 3

$B_{23} = \frac{1}{\det A}\cdot A_{32}$

onde $A_{32}= (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} = -2$

∴

$b_{23} = \frac{1}{3}\cdot(-2)=-\frac{2}{3}$

Propriedades

1ª) $(A^{-1})^{-1} = A$

2ª) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
3ª) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4ª) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Exercícios Resolvidos

01. Encontre a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, se existir.

Resolução:

det A = 6 – 6 = 0, logo não existe a matriz inversa.

02. Mostre que, se uma matriz quadrada é invertível, então det $A \neq 0$.

Resolução:

Se A é inversível, então:
$A^{-1} \cdot A = I$
$\det (A^{-1} \cdot A) = \det I$
$(\det A) \cdot (\det A^{-1}) = 1$
Portanto $\det A \neq 0$ *e*
$\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

03. (UFU-MG) Considere o conjunto das matrizes da forma $\begin{pmatrix} x-3 & x+k \\ 1 & x-5 \end{pmatrix}, x \in R.$

Determine o valor de *k* para o qual exista exatamente uma matriz não-inversível nesse conjunto.

Resolução:

$\det A = \begin{vmatrix} x-3 & x+k \\ 1 & x-5 \end{vmatrix}$

$(x-3)\cdot(x-5)-1\cdot(x+k) =$

$x^2 – 8x + 15 – x – k = x^2 – 9x + 15 – k$

Para não se ter A^{-1}*, devemos ter det A = 0.*

$x^2 – 9x + 15 – k = 0$

Como queremos uma matriz não-inversível, devemos ter $\Delta = 0$ *:*

$\Delta = (–9)^2 – 4(1)\ (15 – k) = 0$

$81 – 60 + 4k = 0$

$4k = –21$

$k = -\frac{21}{4}$

Resposta: *Teremos* $k = -\frac{21}{4}$.

04. Calcule se existir, a inversa da matriz A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Resolução:

1º) Vamos calcular o determinante de A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-24 \; -1 \; -0 \; +4 \; +6 \; +5$$

det A = – 15 logo A tem inversa

2º) Matriz dos cofatores

$$cof\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & -10 & 5 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3º) Matriz Adjunta (transposta da matriz dos cofatores)

$$cof\ A^t = adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 3 & -10 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4º) Cálculo da inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (cof\ A)^t$$

Como det A = –15, temos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{-15} & \frac{0}{-15} & \frac{-6}{-15} \\ \frac{3}{-15} & \frac{-10}{-15} & \frac{-1}{-15} \\ \frac{-6}{-15} & \frac{5}{-15} & \frac{2}{-15} \end{pmatrix}$$

Resposta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

CURSO DE ENGENHARIA

DISCIPLINA: Álgebra Linear PROFESSORA: Alessandra Stadler Favaro Misiak

Lista de exercícios Matriz Inversa

Exercício 1: *Calcule a matriz inversa de A, se possível:*

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine a matriz inversa:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Respostas: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -28 \\ -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule det A^{-1}. Resposta: 1

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) $(A \cdot B)^{-1}$ b) $(A \cdot B)^T$ c) $A \cdot A^{-1} - I$ d) $(2 \cdot B)^{-1}$

Resp: a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -16 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ c) **0** d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcule a para que A seja inversível. R: $a \neq 2$

6. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine o valor do elemento a_{23} de A^{-1}. R:-2